RLC série en régime forcé (+ rappels et compléments)

☞ La tension est la ..... de potentiels (d.d.p) ou encore différence d'états électriques entre deux points A et B

$$U_{AB} = V_{AB} = V_A - V_B$$

Son unité est le volt [V] et l'instrument/appareil de mesure est le ....., toujours placé en ....., dit parfois aussi en ..... !

Soient trois points A, B, C de l'espace. Montrez que $U_{AB} = U_{AC} + U_{CB}$ en utilisant les d.d.p [cette égalité est appelée l'additivité de la tension]

....

☞ La charge électrique (q ou Q) est la quantité d'électricité, sa formule: $Q = \mathrm{N} \times \mathrm{q_e}$ c-à-d s'il y a N porteurs, il suffit de multiplier N par la charge $\mathrm{q_e}$ d'1 porteur.

Unité: ..... [C], unité équivalente: puisque 1 A = C/s, le coulomb est l'équivalent de l'ampère-seconde

Entre autre, la capacité d'un réservoir de charge (=accus, pile) se mesure le plus souvent en ampère-heure, avec: 1 Ah = 3600 A.s = 3600 C
Calculez en coulomb la capacité d'un accus: 2200 mAh, ici..... et la charge maximale ($U \times C$) d'un condensateur 10000 uF—50 V, ici ..... .

☞ Le courant électrique est un ..... de charges (ou porteurs de charge) qui sont des e^- dans les ..... et des ..... dans les électrolytes (ex: dans les accus au plomb)

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t) \quad \text{et} \quad i_{\text{moyen}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

i est donc le ..... de charges + qui circule dans une section de conducteur. Si on double le débit, par exemple on passe de N porteurs par seconde à 2N porteurs par seconde, le courant est aussi doublé. Mais il faut juste se souvenir que i mesure le débit de charge + donc, le débit **inverse des charges négatives**, i.e des e^-
Unité: l'ampère [A], qui est équivalente à un débit de 'un coulomb par seconde'
L'appareil de mesure est l'ampèremètre, il est placé en .....

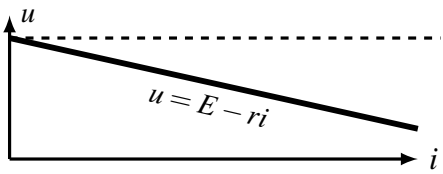
Retrouvez la relation $q(t) = f^{\circ}(i(t))$ d'après la relation précédente.

....

Aspects pratiques vs aspects théoriques

— Les sources de courant sont plus rares et plus spécifiques que les sources de tension. En théorie, on peut penser qu'un générateur de courant sinusoïdal peut être fabriqué simplement. Mais en pratique, c'est quasimment inexistant

— C'est la résistance interne d'une source de tension qui fait baisser sa tension de sortie lorsqu'on lui demande plus de courant.
C-à-d: $i \nearrow \implies u \searrow$



$u = E$
(source idéale théorique)

— Il y a deux variétés de condensateurs: les polarisés (ils possèdent une borne $+$ et une borne $-$) et les non polarisés. Ceux qu'on utilise en RLC sont les 'non polarisés' mais pour démontrer la retention de charge électriques, nous choisissons les polarisés à cause de leurs capacités élevées (cf. photo plus loin, p7)

Grandeurs sinusoïdales en fonction du temps t

Nous utilisons ici des sources sinusoïdales (de courant ou tension) pour l'étude théorique des RLC série. Les sources sinusoïdales de tension existent vraiement, ce sont les alternateurs

$$u(t) = U_{max}\sin(2\pi ft) \quad \text{ou} \quad u(t) = U_{\text{eff}}\sqrt{2}\sin(2\pi ft)$$

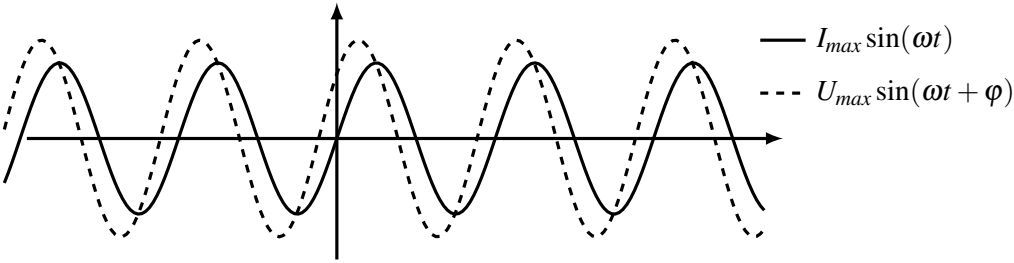
NB. Les grandeurs U_{max} et U_{eff} (ou aussi U_e) sont respectivement la valeur maximale et la valeur efficace. Ce sont des constantes (= indépendantes du temps)
NB. La valeur efficace d'une tension (ou d'un courant) sinusoïdale est la valeur de la tension (ou du courant) continue constante qui apporte la même puissance ($P = UI$). Elle est calculée par le RMS (Root Mean Square):

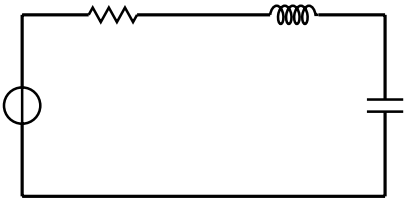
$$U_{\text{RMS}} = U_{\text{eff}} = U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} \qquad \text{où} \quad T = \text{période}$$

NB. La constante $\sqrt{2}$ entre les deux est le facteur de forme pour les sin et cos.
■ Vous pouvez effectuer cette vérification pour toute fonction de la forme $A\sin(\omega t + \varphi)$ ou $A\cos(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = 2\pi f$. Ici, sachant que $\int(\sin^2 x)\,dx = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin(2x))$

....

Nous supposons un courant sinusoïdal $i(t) = I_{max}\sin(\omega t)$ et nous cherchons $u(t)$





$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

- $u_R(t) = Ri(t)$ (en phase avec $i(t)$)
- $u_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$ (pas en phase avec $i(t)$)
- $u_C(t) = q/C = \dfrac{\int i(t)dt}{C}$ (pas en phase avec $i(t)$)

Appliquons l'additivité de la tension (mais uniquement valable pour les valeurs instantanées)

- $\boxed{u_R(t) = RI_{max}\sin(\omega t)}$

$u_R(t)$ a une phase nulle: elle est en phase!

- $u_L(t) = LI_{max}\omega\cos(\omega t)$
  $= \boxed{L\omega I_{max}\sin(\omega t+\pi/2)}$

$u_L(t)$ a une phase positive de $\pi/2$, elle est en avance de phase.

- $u_C(t) = \int \dfrac{I_{max}}{C}\sin(\omega t)dt$
  $= -(I_{max})/(C\omega)\cos(\omega t)$
  $= \boxed{\dfrac{I_{max}}{C\omega}\sin(\omega t-\pi/2)}$

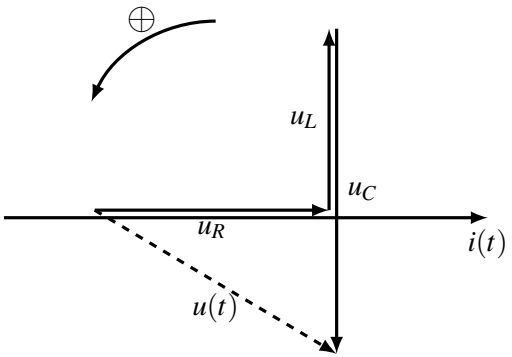
Explication sur u_C. L'amplitude doit être positive, nous exploitons le fait que $-\cos x = \cos(x\pm\pi)$ et comme précédemment, $\cos x = \sin(x+\pi/2)$, d'où $-\sin(\omega t+\pi/2) = \sin(\omega t+\pi/2-\pi)$
Mais la phase doit être entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ donc, nous prenons $(-\pi)$ et pas $+\pi$

Diagrammes de Fresnel

À 1e fonction sinusoïdale nous associons un vecteur | amplitude
| phase

Ces vecteurs tournent à la vitesse ω dans le sens trigonométrique. Et, à $t = 0$, nous avons:

$$u_R \left| \begin{array}{l} RI_{max} \\ \\ 0 \end{array} \right. \qquad u_L \left| \begin{array}{l} L\omega I_{max} \\ \\ \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right. \qquad u_C \left| \begin{array}{l} \dfrac{I_{max}}{C\omega} \\ \\ -\dfrac{\pi}{2} \end{array} \right.$$



Si $L\omega > \dfrac{1}{C\omega}$ l'effet de L est plus grand, le circuit est dit **inductif**

Si $L\omega < \dfrac{1}{C\omega}$ l'effet de C est plus grand, le circuit est dit **capacitif**

Si $L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$ les deux effets s'annulent. le circuit est **résistif** et $\cos\varphi = 1$, $\cos\varphi$ étant le facteur de .....

En posant $X = L\omega - \dfrac{1}{C\omega}$ (c'est la réactance du circuit)

La valeur max de $u(t)$ est obtenue par: $U_{max}^2 = (RI_{max})^2 + (|X|I_{max})^2$

$$U_{max} = \left\{ \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \right\} I_{max} = Z \times I_{max}$$

En divisant cette égalité par $\sqrt{2}$,
La loi d'Ohm s'écrit avec les grandeurs efficaces : $\boxed{U = ZI}$

La phase φ est telle que: $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z} \quad \Longrightarrow \varphi = \arccos(R/Z)$

Interprétations et conclusions

☞ En pratique, L provoque une inertie en courant, c-à-d que la variation de courant est en retard. Autrement dit, la présence d'1e L provoque globalement un retard de la phase du courant par rapport à la tension. Et effet contraire pour C.

☞ La source sinusoïdale de courant alimente une charge généralisée (pas uniquement une simple R); la tension aux bornes de cette source s'en trouve déformée; $U = ZI$ et déphasée de φ et donc, $\boxed{u(t) = Z \times I_{max} \sin(\omega t + \varphi)}$

☞ Le déphasage, φ, peut être un retard ou une avance, selon la comparaison entre $L\omega$ et $\dfrac{1}{C\omega}$. Si l'inductance l'emporte, le courant est en retard, donc la tension est en avance. Et vice-versa. Et ce déphasage est toujours entre $-\pi/2$ et $\pi/2$

Question de puissance moyenne, active, réactive et apparente

☞ La puissance active moyenne absorbée par le RLC s'écrit: $P = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u(t) \cdot i(t)\, dt$

Nous trouvons: $\boxed{P = U_e I_e \cos\varphi = UI\cos\varphi}$ Elle est mesurée en W.

C'est elle qui est mesurée par les compteurs classiques d'électricité.

☞ Par analogie, $\exists$ une puissance non wattée ou réactive qui s'écrit $Q = UI\sin\varphi$. Elle est mesurée en VAR. Elle est nulle si la charge est purement ....., elle est aussi nulle pour un RLC à la résonance.

☞ Enfin, la puissante apparente est $\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2}}$ Elle se mesure en VA (volt ampère).
Montrez que $S = U_e I_e$, ici ....

Conséquence d'un faible facteur de puissance. Si vous apportez une puissance active $P = 1$ KW à une charge ayant un $\cos\varphi$ de 0.8, alors $P_a = P\cos\varphi = 800$ W seulement seront actives, c-à-d transformées en énergie utile (chaleur ou mécanique, etc.) 200 W actives sont perdues par le comportement réactif. Il faut majorer la puissance *active* à fournir selon la formule:

$$P' = \frac{P}{\cos\varphi} \quad \text{(en W)}$$

Pour un moteur, on a: $P = 382$ W et $\cos\varphi = 0.57$. Calculez S et Q

....

Résonance et bande passante

☞ Il faut comprendre que les effets de L et de C changent avec la fréquence du générateur. Et il y a une seule valeur de f et donc de ω telle que les effets de L et C s'annulent. Dans cette condition: $Z = R$ et $\cos\varphi = 1$; ON DIT QUE LE CIRCUIT EST EN RéSONANCE. La fréquence du générateur se coïncide avec la fréquence de

l'oscillateur L, C, la tension efficace atteint sa valeur max possible pour ce montage.
$L\omega = \dfrac{1}{C\omega} \Longrightarrow LC\omega_0^2 = 1$

☞ La bande passante d'un circuit RLC est une zone qui entourre la résonance, délimitée par les deux fréquences auxquelles, nous avons $U_{\text{eff}} = \dfrac{U_{\text{eff_RESO}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}$

Nous verrons ces fréquences dans les courbes de la dernière page!

Rappel des formules d'addition de fonction trigo

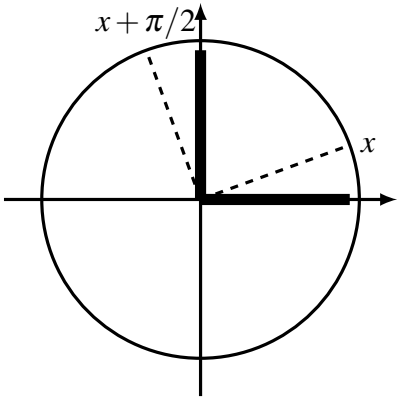
$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b) \\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \end{aligned}$$

Toutes les autres sont obtenues à partir de ces deux formules, ajoutées des parités respectives de sin (qui est impaire) et de cos (qui est paire)

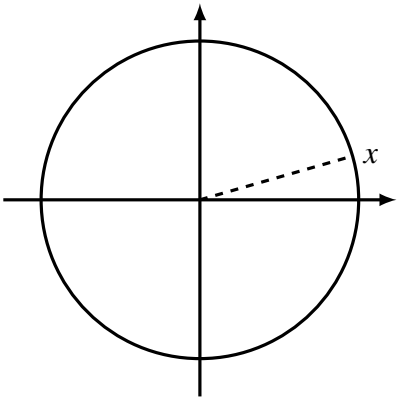
ex: $\sin(\omega t+\pi/2) = \sin(\omega t)\cos(\pi/2)+\cos(\omega t)\sin(\pi/2)$
Or: $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$; donc il reste $\cos(\omega t)$
$\sin(\omega t+\pi/2) = \cos(\omega t)$

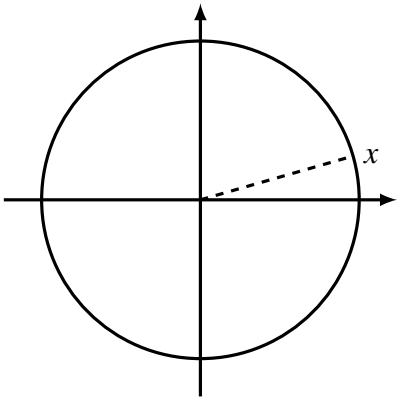
Cercle trigo

Le cercle trigo permet de rapides vérifications lors d'addition par des angles particuliers, par ex: $\cos(x+\pi/2) = \sin(x)$. Mais il permet autres choses bien sûr
De la même façon, on peut vérifier que: $\sin(x+\pi/2) = \cos(x)$
Et que: $\sin(x+\pi/2) = -\cos(x)$



Vous pouvez vous exercer à placer les points $x+\pi/2$ ou $x-\pi$ sur le cercle et d'en déduire leurs cos et sin pour voir les formules dont on peut avoir besoin.





Sur la photo: trois résistances ohmiques, une ampoule incandescente (c'est aussi une R mais à cause de son incandescence, sa résistance varie rapidement due à l'échauffement), quatre inductances dont la dernière est torique.
À la deuxième ligne: deux condensateurs polarisés (680 uF et 100 uF), puis sept autres non polarisés et le dernier en bas à droite est un condensateur axial polarisé (470 uF)

Refaites le même chemin pour $i(t) = I_{max}\cos(\omega t)$

C-à-d cherchez l'expression de $u(t) = Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)dt$ en utilisant la fonction 'cos' maintenant car $i(t)$ est maintenant donné en cos

Autrement dit, trouver l'expression de la phase φ de la tension par rapport à l'intensité et aussi l'impédance globale Z du RLC série

Code Python pour calculer automatiquement $X, Z, \cos\varphi$ dans un fichier texte CSV (comma separated values) en faisant varier la fréquence entre 50 Hz et 1000 Hz par pas de 5 Hz

```
#-*-coding=utf8-*-

#OBJECT: computing X, Z, cosPHI in automated way
# and write result to a CSV file in order to
# plot it with Maplotlib or gnuplot, etc.

import numpy as np    #delete this import if U don't have Numpy!
from math import sin, cos, tan, sqrt, acos, atan, pi

def X(L, C, omega):
        return (L*omega - 1.0/(C*omega))

def X2(L, C, omega):
        return X(L,C,omega)*X(L,C,omega)

def Z(R, L, C, omega):
        return sqrt(R*R + X2(L,C,omega))

def Zx(R, X):
        return sqrt(R*R + X*X)

def PowFact(R, L, C, omega):
        return acos(R/Z(R,L,C,omega))

def PowFactor(R, Ztot):
        return R/Ztot


R = 1000
L = 1           # 100 mH
C = 2.2E-6  # 2.2 uF
f = 250      # 250 Hz, but wille be changed though

# series beginning with f=50, step=5, growing to 995 Hz
# if we don't have numpy, we must use a list and a # for loop.
# flist = [ ]   # empty list
# for k in range(1000/5):
#          flist.append(50 + k*5)

flist = np.arange(50, 1000, 5)
```

```
ome = 2*pi*f
ZC = 1./(C*ome)
ZL = L*ome

Xi = X(L, C, ome)
Zt = Zx(R, Xi)

print("circuit resonant f0={}".format(1./(2*pi*sqrt(L*C))) )
print("freq={}, pulse={}".format(f, ome))
print("ZL={}, ZC={}".format(ZL, ZC) )
print("X={}, Z={}".format(Xi, Zt))

print(flist)

xlist = [X(L,C,6.2831853*fi) for fi in flist]

zlist = [Zx(R, xl) for xl in xlist]

pflist = [PowFactor(R, zl) for zl in zlist]

fout = open("rlc_data-1H.txt", "wt")

#write to file
for (f, x, z, pf) in zip(flist, xlist, zlist, pflist):
        fout.write(str(f)+" " + str(x) + " " + str(z) + \
         " " + str(pf) + "\n")

fout.close()

# to plot, U can use gnuplot, Excel, etc. or, the best: ‘Matplotlib’
# with gnuplot: plot "rlc_data-1H.txt" using 1:4
```

Extrait du fichier résultat

```
f       X       Z       cos phi
120  151.1226  1011.3546  0.9888
125  206.6530  1021.1295  0.9793
130  260.3283  1033.3300  0.9677
135  312.3548  1047.6476  0.9545
140  362.9091  1063.8153  0.9400
```

Code C qui fait exactement la même chose que le code Python

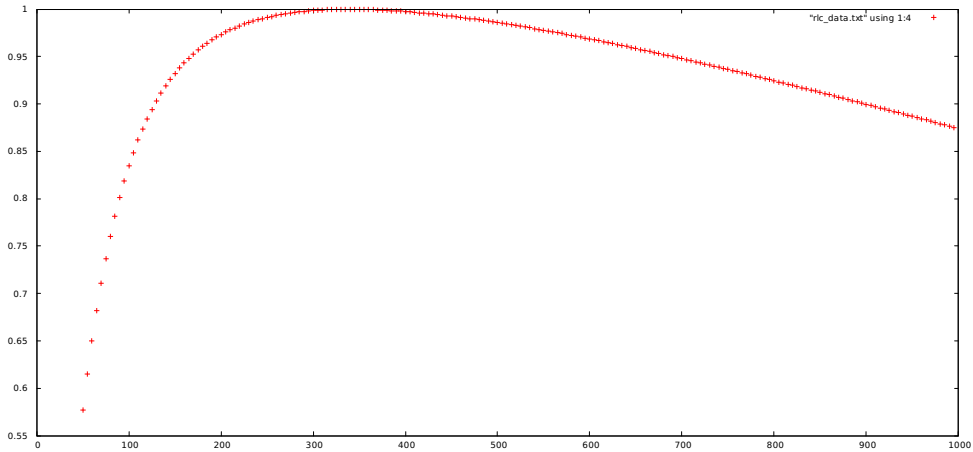
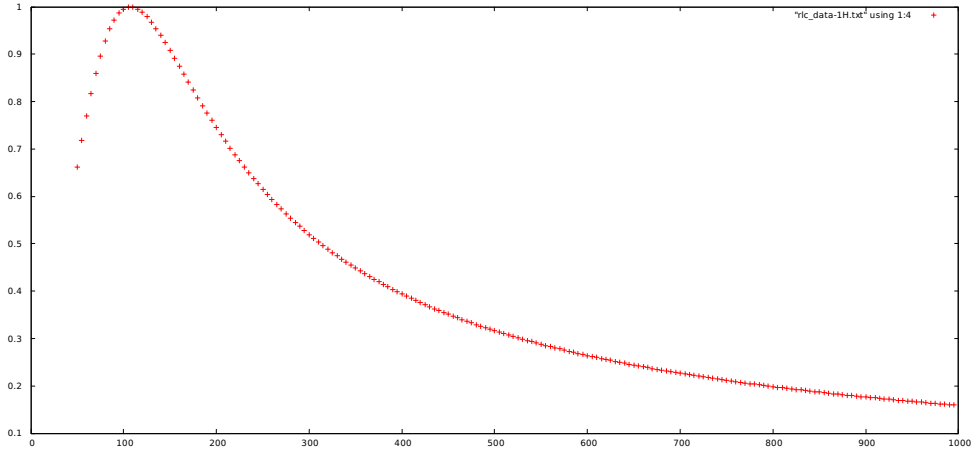
```
// fichier RLC.c

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

// compile with: gcc -o RLC.elf -std=c99 RLC.c -lm

#define pi 3.15159

double X(double L, double C, double omega)
{
    return (L*omega - 1.0/(C*omega)) ;
}

double X2(double L, double C, double omega)
{
    return X(L,C,omega)*X(L,C,omega);
}

double Z(double R, double L, double C, double omega)
{
    return sqrt(R*R + X2(L,C,omega));
}

double Zx(double R, double X)
{
    return sqrt(R*R + X*X);
}

double PowFact(double R, double L, double C, double omega)
{
    return acos(R/Z(R,L,C,omega));
}

double PowFactor(double R, double Ztot)
{
    return R/Ztot ;
}

int main(int argc, char *argv[] )
{
```

```
    double f = 1000;
    double R = 1000;
    double L = 1E-3;
    double C = 2.2E-6;

    double omeg = 2*pi*f;
    double ZC = 1.0/(C*omeg);
    double ZL = L*omeg;
    double Xi = X(L, C, omeg);
    double Zt = Zx(R, Xi);

    fprintf(stdout, "circuit resonant f0=%1.4f\n",
            (1./(2*pi*sqrt(L*C))) );
    fprintf(stdout, "freq=%1.4f, pulse=%1.4f\n", f, omeg);
    fprintf(stdout, "ZL=%1.4f, ZC=%1.4f\n", ZL, ZC);
    fprintf(stdout, "X=%1.4f, Z=%1.4f\n", Xi, Zt);

    int k, step = 5;  // % Hz step
    double fmax = 6020.f;

    double flist, xlist, zlist, pflist;

    FILE *fout = fopen("Crlc_data-1H.txt", "wt");

    fprintf(fout, "freq   X   imped  cosPHI\n");

    for (k = 1; k < fmax/step; k++)
    {
        flist = (double ) k*step;
        omeg = 2*pi*flist;
        xlist = X(L, C, omeg);
        zlist = Zx(R, xlist);
        pflist = PowFactor(R, zlist);
        // write out
        fprintf(
            fout,
            "%1.4f %1.4f %1.4f %1.4f\n",
            flist, xlist, zlist, pflist);
    }
    fclose(fout);
    fprintf(stdout, "That's all folks\n\n\n");
}
// # with gnuplot: plot "rlc_data-1H.txt" using 1:4
```

Courbes de résonance obtenues par les codes Python (ou C) précédents
valeurs: $R = 1\ K\Omega, \quad L = 0.1H(d'abord), \quad C = 2.2\ \mu F$
ON FAIT VARIER f et ON TRACE ICI $\cos\varphi$

La Bande Passante est la zone limitée par $\cos\varphi \geqslant$ ..... ($\sqrt{2}$ ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$?)

Une résonance très floue, circuit non sélectif. Trouvez graphiquement la B.P



Une résonance plus aigue, circuit plus sélectif. ici, $L = 1\,H$
Trouvez graphiquement la B.P.